e–mail: kvantik@mccme.ru | Издается при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО) | №2 | февраль 2013

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№2
февраль
2013

БУМАГА ВСЁ СТЕРПИТ

МАГИЯ ЧИСЕЛ

ПОЧЕМУ ОБЛАКА СНИЗУ ПЛОСКИЕ?

Enter

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Нежданный сюрприз для всех любознательных сделал музей Mathematikum из Германии. С 13 февраля по 7 марта он проводит свою выставку «Ощути математику!» в Политехническом музее, что находится на Новой площади, в центре Москвы.

Обычно на выставках пишут: «Экспонаты руками не трогать!» Здесь всё наоборот: девиз Mathematikum – «Руками трогать!» Вы сможете самостоятельно построить мост Леонардо да Винчи, «взвесить» теорему Пифагора, сложить эшеровскую мозаику. Необычные зеркала заставят вас задуматься, как же получается видеть бесконечно много отражений? А ещё... Впрочем, приходите – и сами всё узнаете. Вас ждёт множество необычных настольных игр, экспериментов и научных забав!

Вход свободный, выставка открыта ежедневно, кроме понедельника, с 10 до 18 часов.

Интернет-страничка выставки:

http://www.goethe.de/ins/ru/mos/ver/ru10262693v.htm

Сайт музея Mathematikum:

http://www.mathematikum.de

Художник Yustas-07

Почтовый адрес: 119002, Москва,
Большой Власьевский пер., д.11,
журнал «Квантик».
Подписной индекс: 84252

www.kvantik.com
@ kvantik@mccme.ru
kvantik12.livejournal.com
vk.com/kvantik12

Главный редактор: Сергей Дориченко
Зам. главного редактора: Ирина Маховая
Редакция: Александр Бердников, Алексей Воропаев, Дарья Кожемякина, Андрей Меньщиков, Григорий Фельдман
Главный художник: Yustas-07
Верстка: Ира Гумерова, Рая Шагеева
Обложка: художник Виктор Пяткин
Формат 84х108/16. Издательство МЦНМО

Журнал «Квантик» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.
ISSN 2227-7986
Тираж: 1-й завод 500 экз.
Адрес редакции: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499)241-74-83. e-mail: kvantik@mccme.ru

По вопросам распространения обращаться по телефону: (499) 241-72-85;
e-mail: biblio@mccme.ru
Подписаться можно в отделениях связи Почты России, подписной индекс **84252**.
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО "ИПК Парето-Принт", г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №

СОДЕРЖАНИЕ

СМОТРИ!

МАГИЯ ЧИСЕЛ

Григорий Фельдман

Когда в кино показывают математиков, они зачастую выглядят безумными одиночками, решающими задачи, в которых никто ничего понять не в состоянии – даже формулировка задачи неподвластна простым смертным. Небольшая доля истины в этом есть. Так, для того чтобы понять условие нашумевшей гипотезы Пуанкаре, доказанной российским математиком Григорием Перельманом, нужно пройти университетский курс геометрии.

Но бывают и исключения: некоторые утверждения, интересующие в настоящее время математиков, формулируются очень просто. Правда, доказательства, как правило, оказываются исключительно сложны; но давайте узнаем несколько проблем, которые волнуют математический мир!

Начнём с известного многим примера.

ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА, ОБЕСЦЕНИВШАЯСЯ ПРЕМИЯ И МУЛЬТИКИ

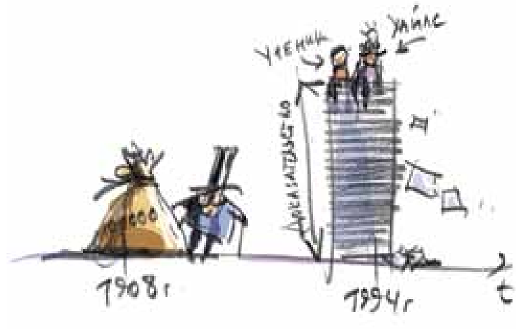
В 1637 году Пьер Ферма́, великий французский математик, написал на полях книги Диофанта «Арифметика» следующие строки:

> *…невозможно разложить куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я нашёл этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него.*

Так была сформулирована **Великая теорема Ферма**. На современном языке она звучит чуть менее поэтично, но более понятно:

При натуральном $n > 2$ не существует таких натуральных чисел a, b, c, что $a^n + b^n = c^n$.

Запись a^n обозначает произведение $a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n раз).



Давайте немного поразмыслим над этим утверждением.

Задача 1. Изменим формулировку теоремы Ферма: пусть $n = 2$, а всё остальное остаётся прежним. Докажите, что получилась неверная теорема. Для этого подберите такие натуральные числа a, b, c, чтобы выполнялось требуемое равенство.

Задача 2. Докажите теорему Ферма в случае, когда числа a, b, c нечётны.

Простота и изящество теоремы, а также лукавый намёк Ферма на поразительное доказательство влекли к ней не только профессиональных математиков, но и любителей. Один из них, немецкий богач Вольфскель, в 1908 году завещал 100 000 немецких марок тому, кто предъявит верное доказательство. Приз подогрел и без того немалый интерес к теореме; правда, после Первой мировой войны премия обесценилась.

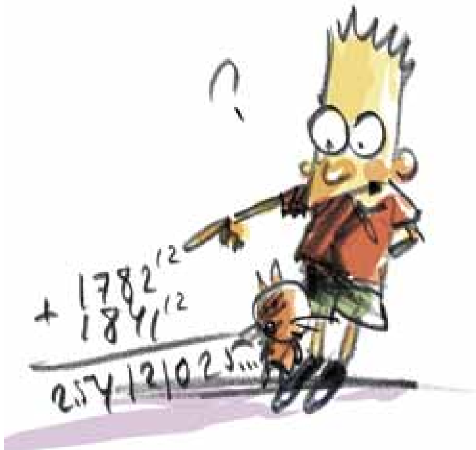
Ныне теорема Ферма доказана совместными усилиями многих математиков. Её доказательство очень сложно, занимает несколько сотен страниц непростого математического текста. Завершающий шаг в доказательстве сделал английский математик Эндрю Уайлс при помощи своего ученика Ричарда Тейлора в 1994 году.

Существует немало троек чисел, которые «почти» удовлетворяют условиям теоремы Ферма. Например, одна из них приведена в мультсериале «Симпсоны»*:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 254121025\ldots,$$
$$1922^{12} = 254121025\ldots$$

Задача 3. Как можно легко, без калькулятора, понять, что эти три числа не являются решением уравнения Ферма?

СМОТРИ!



ПРОСТЫЕ ЧИСЛА-БЛИЗНЕЦЫ

Особое значение в математике имеют простые числа: так называют числа, которые не делятся ни на какие другие натуральные числа, кроме самого себя и единицы. При этом 1 не считается простым числом.

Важность простых чисел демонстрирует

Основная теорема арифметики. *Каждое натуральное число, большее* 1, *либо само простое, либо представляется в виде произведения нескольких простых чисел, причём такое представление единственно с точностью до порядка следования сомножителей.*

Задача 4. Представьте 2012 в виде произведения простых чисел.

Зададимся естественным вопросом: а сколько простых чисел? Предположим, их конечное число. Обозначим произведение всех простых чисел буквой N. Число N делится на каждое простое число,

* Получающиеся числа очень велики, поэтому показаны только несколько первых цифр.

СМОТРИ!

Первые несколько простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157...

а значит, следующее за ним число $N+1$ имеет остаток 1 от деления на любое простое число, то есть не делится на него. Поэтому число $N+1$ не является простым и не представляется в виде произведения простых чисел, что противоречит основной теореме арифметики. Итак, мы доказали теорему:

Теорема. *Простых чисел бесконечно много.*

Заметим, что встречаются пары простых чисел, отличающихся друг от друга на 2. Например: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 41 и 43 и т. д. Такие пары называются простыми числами-близнецами.

Гипотеза. *Простых чисел-близнецов бесконечно много.*

Удивительно, но столь просто звучащее утверждение до сих пор не доказано. Пока что найдены (с помощью компьютерных вычислений) числа-близнецы, для записи каждого из которых нужно более 200 000 десятичных знаков.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ ИЗ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Будем говорить, что k чисел, расставленных в порядке возрастания (или убывания), образуют арифметическую прогрессию с разностью d, если разность любых двух соседних чисел равна d. Например, числа 2, 5, 8, 11 образуют арифметическую прогрессию с разностью 3.

Задача 5. Найдите арифметическую прогрессию длины 3 с разностью 2, состоящую только из простых чисел. Докажите, что такая прогрессия единственна.

Если вы попробуете найти арифметическую прогрессию длины 5 из простых чисел, то увидите, что это весьма непросто. Но тем не менее она существует, и не одна. Вот, например, такая прогрессия с разностью 6: 5, 11, 17, 23, 29.

Верна следующая теорема:

Теорема Грина – Тао. *Для любого натурального числа k найдётся арифметическая прогрессия длины k, состоящая только из простых чисел.*

Она была доказана в 2004 году австралийцем Теренсом Тао и англичанином Беном Грином. Теренсу

Тао в 2006 году была присуждена премия Филдса – самая престижная премия для математиков.

СМОТРИ!

ГИПОТЕЗА ГОЛЬДБАХА И БЕССИЛИЕ КОМПЬЮТЕРОВ

Как мы уже знаем из основной теоремы арифметики, любое натуральное число либо простое, либо представляется в виде произведения нескольких простых чисел.

Задача 6. Докажите, что любое натуральное число, большее 3, представляется в виде суммы нескольких простых чисел.

После решения задачи 6 возникает логичный вопрос: каково минимально возможное количество слагаемых в этой сумме? Аналогичным вопросом задался в 1742 году немецкий математик Кристиан Гольдбах и в письме к швейцарскому математику Леонарду Эйлеру высказал такую гипотезу:

Гипотеза Гольдбаха. *Любое нечётное число, большее 5, представляется в виде суммы трёх простых чисел.*

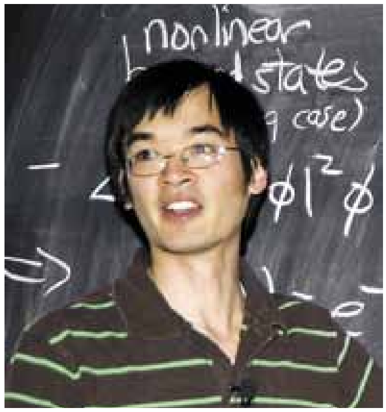
Раздумывая над этой гипотезой, Эйлер выдвинул такое утверждение:

Гипотеза Эйлера. *Любое чётное число, большее 3, представляется в виде суммы двух простых чисел.*

Задача 7. Докажите, что если верна гипотеза Эйлера, то верна гипотеза Гольдбаха.

Ситуация с доказательством этой гипотезы весьма любопытная. В 1937 году советский математик И.М.Виноградов доказал, что все нечётные числа, большие некоторого очень большого числа N (записывающегося более чем 6 миллионами цифр), представляются в виде суммы трёх простых. Казалось бы, осталось на компьютере перебрать все числа, меньшие N. Но, несмотря на прогресс компьютеров, вычислительных мощностей не хватает, чтоб проделать этот перебор.

С другой стороны, в 1930 году советский математик Л. Г. Шнирельман доказал такой факт: любое число представляется в виде суммы не более чем 800 000 простых. Конечно, результат немного забавный (на фоне требований гипотезы). К настоящему времени доказано, что любое число представляется в виде суммы не более чем 7 простых.



Теренс Тао

Художник Сергей Чуб

Александр Бердников

Почему облака снизу плоские?

В тихую погоду над нами часто плывут кучевые облака. Как они возникают? Чтобы это понять, нам понадобятся два важных факта.

Во-первых, чем больше высота, тем холоднее становится вокруг. Например, в высоких горах так холодно, что снег там лежит даже летом.

Во-вторых, чем ниже температура, тем меньше водяных паров может удерживать в себе воздух. Например, когда вы дышите зимой на улице, температура выдыхаемого воздуха сразу же сильно падает, и растворённые в воздухе водяные пары, невидимые до этого, «выпадают» в виде множества маленьких капелек – «пара». То же явление можно заметить, наблюдая за носиком кипящего чайника. Обычно струя белого «пара» (тумана) начинается не сразу от края носика, а в 1-2 см от него. Эти 1-2 см – струя настоящего водяного пара (прозрачного газа), который ещё не успел остыть в холодном воздухе комнаты.

Объяснения перечисленных фактов мы оставим учителям физики, иначе наш разговор получится слишком долгим и сложным. А теперь вернёмся к облакам.

Они образуются из водяных паров, которые вместе с тёплым воздухом поднимаются от поверхности

земли вверх (рис. 1, а). Температура падает, и вот воздух достигает высоты, на которой уже слишком холодно, чтобы водяные пары оставались растворёнными в воздухе. Эти пары выпадают, конденсируются в мельчайшие капельки «тумана» (рис. 1, б).

Но этим дело не заканчивается. При конденсации пара происходит выделение огромного количества теплоты. Эта энергия нагревает воздух вокруг, и пар временно перестает конденсироваться. Нагретый и всё ещё влажный воздух продолжает подниматься вверх, уступая место новой порции холодного воздуха, а сам порождает «туман» уже на большей высоте, и так далее. В результате над плоским основанием кучевого облака образуется растущая вверх шапка, которая обычно имеет форму «кучи» (рис. 1, в). Отсюда и произошло название этого типа облаков.

Описанный процесс очень нагляден, если просмотреть образование облака в ускоренном темпе. Будто бы земля – как вы зимой – выдыхает вверх, и облако – это просто её «пар изо рта». Это сходство не случайное: по сути, происходит одно и то же. В обоих случаях тёплый влажный воздух попадает на холод и содержавшаяся в нём вода из-за охлаждения конденсируется, превращаясь в «туман». Просто в случае с облаками «зима» для них начинается с определённой высоты. Потому они рождаются по одну сторону от невидимой горизонтальной плоскости, отделяющей достаточно холодную атмосферу от всё ещё слишком тёплой для образования облаков. Именно эту плоскость мы и видим, глядя на нижнюю поверхность облака.

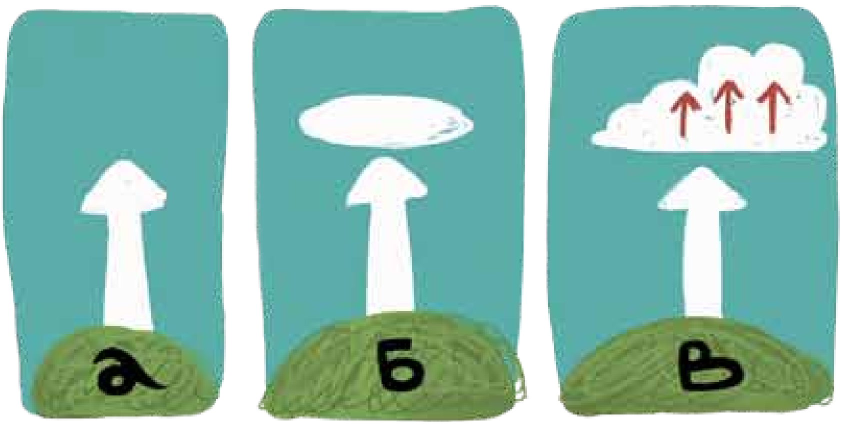


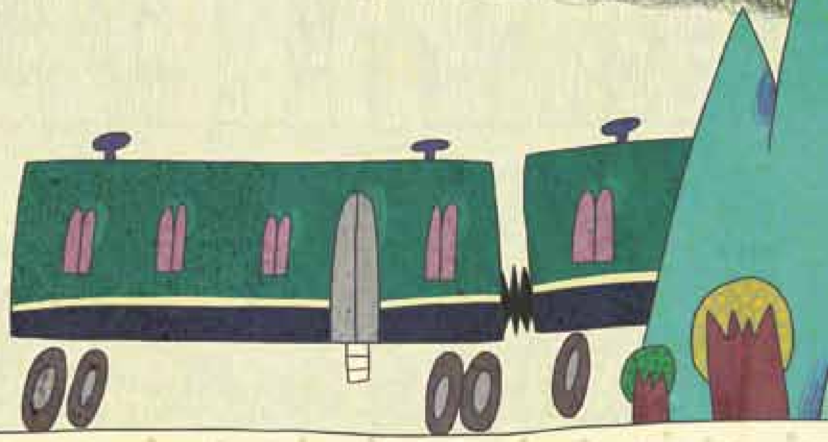
Рис.1

Художник Мария Сергеева

По материалам радиокружка «Сигма»

Мудрецы и копоть

Вот поезд мчится сквозь туннель,
в туннеле дым и чад.
В купе четыре мудреца
задумчиво сидят.
Влетела копоть сквозь окно,
и вот в конце концов
она попала на лицо
двоих из мудрецов.



Сидели хмуро мудрецы,
глаза уставив в пол,
но вот открылась дверь купе
и проводник зашёл.
Сказал он: «Среди вас, друзья,
есть грязные, увы,
на остановках есть вода,
идите мыться вы».

И вот один из грязных двух,
в раздумье погружён,
не знает, как определить,
чист или грязен он.
Не хочет мыться ни за что
напрасно – вот чудак! –
но на соседа он глядит
и рассуждает так.

«Допустим, чист я, но тогда
бы понял мой сосед,
что грязен он, ведь видит он,
что больше грязных нет.
Но умываться не идёт
сосед мой, вот беда.
Выходит, грязен я. Ну что ж,
умоюсь я тогда».

Вот мыться грязные идут
и вот чисты опять,
а тех, кто слушал наш рассказ,
мы просим написать:
а если б трое было их,
тех грязных мудрецов?
Пошли бы мыться или нет
они в конце концов?

Художник Наталья Гаврилова

НАГЛЯДНАЯ МАТЕМАТИКА

Александр Блинков

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ

(... НЕ ОТРЫВАЯ РУКИ ...)

Представим себе, что по поверхности стола ползает (но не взлетает!) муха. Тогда, как бы она ни меняла направление своего движения, мы сможем нарисовать траекторию этого движения «не отрывая руки». На этом простом соображении основано решение нескольких интересных задач. Но сначала вспомним, как устроены графики движений.

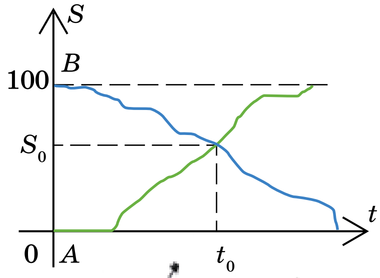
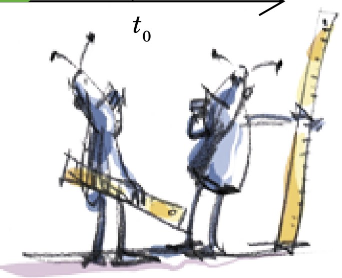


Рис. 1



Пример. Два автомобиля выехали из пунктов A и B, расстояние между которыми 100 км, навстречу друг другу по одному и тому же шоссе. Докажите, что расстояние между автомобилями принимает любое значение от 0 до 100 км (*в какие-то моменты времени*).

Решение. Отметим сначала очевидный факт: автомобили обязательно встретятся, независимо от того, как менялись их скорости, а также от того, в какое время каждый из них выехал. Тем не менее, полезно на это посмотреть с точки зрения графиков движения автомобилей.

Рассмотрим систему координат на плоскости: ось абсцисс t – время движения, ось ординат S – расстояние автомобиля от пункта A. Начнём отсчёт в тот момент, когда машина, выехавшая первой, начала движение. Тогда графики движения машин являются линиями (ломаными или кривыми), которые можно провести «не отрывая руки» (см., например, рис. 1). Заметим, что каждый график соединяет какую-то точку оси t с точкой, лежащей на прямой $S = 100$. Оба графика «начинаются» на одной вертикали и продолжаются вправо. При этом та **непрерывная линия**, которая началась выше, идёт «сверху вниз», а та линия, которая началась ниже, идёт «снизу вверх». Значит, эти линии обязательно пересекутся. Абсцисса t_0 точки пересечения графиков показывает время встречи автомобилей, а ордината S_0 – расстояние от пункта A до места встречи (*если в тот момент, когда одна машина ещё не выехала, другая уже проехала весь путь, то «встреча» произошла либо на оси t, либо на прямой $S = 100$*).

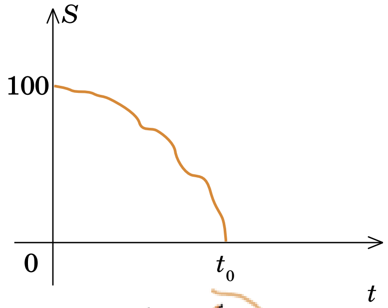
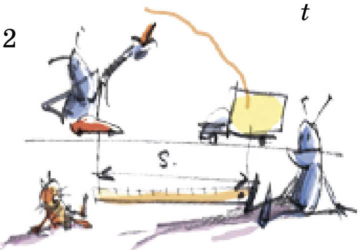
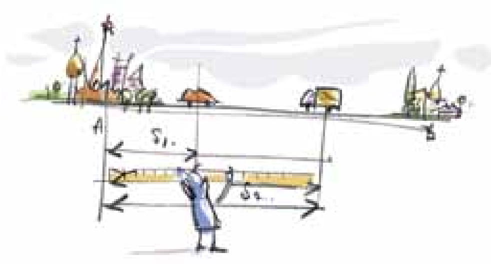


Рис. 2



Для решения задачи также удобно посмотреть на график в похожей системе координат. Но теперь имеет смысл проследить зависимость расстояния между автомобилями от времени, начиная от момента выезда одного из автомобилей (того, который выехал первым), и до момента встречи.



Понятно, что расстояние между машинами также меняется **непрерывно**, значит, такой график также является **непрерывной линией** (см. рис. 2). Легко заметить, что на этом графике существуют точки с любой ординатой от 0 до 100, поэтому расстояние S между машинами в какие-то моменты времени принимает все значения от 0 до 100, что и требовалось.

Тот же результат можно было получить, рассмотрев аналогичную зависимость в другой промежуток времени – от момента встречи автомобилей до момента, когда в пунктах назначения уже окажутся оба автомобиля.

Теперь рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Два скалолаза шли двумя разными маршрутами, стартовав одновременно, и достигли точки финиша на вершине скалы также одновременно. Расстояние между точками их старта – 50 метров. Докажите, что в какой-то момент расстояние между скалолазами было 30 метров.

Решение. Прежде всего отметим, что скала может иметь любую, даже весьма причудливую, форму (например, как на рис. 3), поэтому было бы ошибкой считать, что расстояние между скалолазами всё время уменьшается.

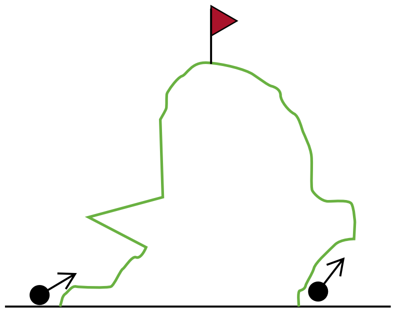
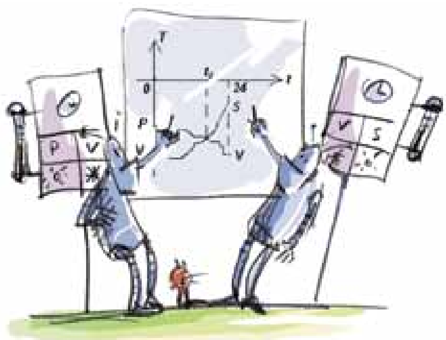


Рис. 3

Тем не менее, это расстояние S с течением времени t изменяется **непрерывно** (*график зависимости S от t можно провести «не отрывая руки»*). Так как при $t = 0$ $S = 50$, а в момент времени, когда оба скалолаза оказались на вершине, $S = 0$, то, по аналогии с разобранным примером, можно утверждать, что величина S принимает все значения от 0 до 50, в том числе и значение 30.

Соображения непрерывности можно применять не только в задачах, связанных с движением.



Задача 2. Вчера в полночь было холоднее, чем будет сегодня и чем было позавчера. Докажите, что найдётся один и тот же момент времени в сутках вчера и сегодня, когда температура была одинаковой.

Решение. На отрезке [0, 24] построим график изменения температуры за вчерашние сутки (синяя линия). Теперь на этом же отрезке построим график температуры за сегодняшние сутки (зелёная линия), учитывая условие задачи (см. рис. 4, t – время в часах). В одном случае моментам времени 0 и 24 соответствуют точки P (полночь позавчера) и V (полночь вчера), а в другом – опять же V (на той же горизонтали) и S (полночь сегодня).

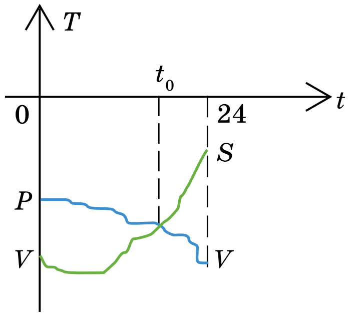


Рис. 4

Так как температура изменяется **непрерывно**, то эти графики пересекутся. Абсцисса t_0 точки пересечения – искомый момент времени.

Задача 3 (*о буддийском монахе*). Монах поднимался на священную гору. Он начал восхождение в 6 часов утра и достиг вершины в 6 часов вечера. На вершине он заночевал, а на следующий день в 6 утра начал спускаться по пути подъёма и достиг подножия горы в 6 часов вечера. Докажите, что существует такая точка на его маршруте, в которой монах сможет помолиться на пути туда и обратно в одно и то же время.

Решение. Представим себе, что монахов было двое, и в тот момент, когда первый начал подниматься на гору, второй начал спускаться с горы по тому же маршруту. Тогда в некоторый момент времени (между 6:00 и 18:00) они окажутся в одной точке, поскольку шли навстречу друг другу. Этот момент времени и эта точка маршрута будут искомыми.

При решении этой задачи мы сами организовали процесс движения монахов навстречу друг другу и использовали **непрерывность графиков** их движения.

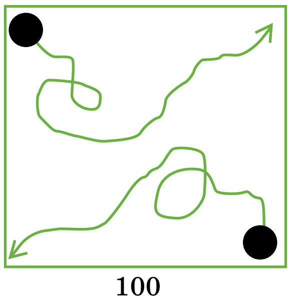
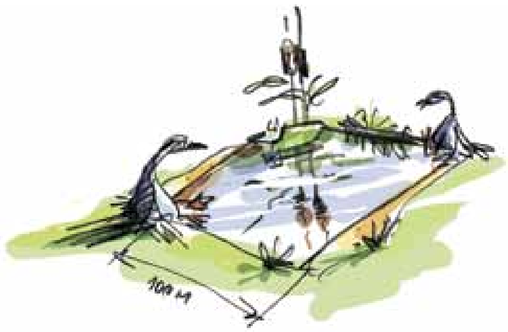


Рис.5

Задача 4. В противоположных углах квадратного пруда со стороной 100 метров сидели два гуся. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между кончиками их клювов было равно 110 метров.

Решение. Изначально гуси находились на концах одной из диагоналей квадрата (см. рис. 5). Те из вас, кто уже знает теорему Пифагора, могут вычислить, что это расстояние в точности равно $100\sqrt{2}$ метров (*это примерно 141 м*), но и остальным, я думаю, понятно, что оно существенно больше, чем 110 м.



В силу симметрии квадрата можно считать, что первый гусь переплыл из левого верхнего угла в правый верхний, а второй гусь – из правого нижнего угла в левый нижний. Для этого в некоторый момент времени гуси обязаны были оказаться на одной вертикали, то есть в этот момент расстояние между ними было не больше, чем 100 м. Поскольку расстояние между гусями изменялось **непрерывно**, и $100 < 110 < 100\sqrt{2}$, то в некоторый момент времени расстояние между их клювами было равно 110 м.

В заключение выразим надежду, что **соображения непрерывности** помогут вам и при решении других задач. С различными **свойствами непрерывных функций** вы более подробно познакомитесь в старших классах.

Григорий Фельдман

БУМАГА всё СТЕРПИТ

Мы привыкли к тому, что бумага легко мнётся и рвётся. Но иногда она показывает невиданные запасы прочности…

Как вы думаете, какой вес может удержать обычный лист бумаги, поставленный на ребро? Сможет ли, например, он выдержать пару номеров нашего журнала? Ясно, что если пытаться действовать в лоб, как слонёнок на рисунке, то лист не то что журнал, он самого себя не выдержит, сложившись посередине. Однако мы смогли на вертикально стоящий лист положить целых 16 номеров журнала (около 2 кг), и при этом лист продолжал стоять!

Давайте учиться такому «волшебству».

Запаситесь несколькими листами формата А4 и клеящим карандашом.

Для того чтобы лист стоял сам, без нагрузки, достаточно просто поставить его уголком, как на рисунке 1. Раньше наш лист мог падать только в сторону, не вдоль себя. Теперь две половинки листа друг друга поддерживают: в ту сторону, куда может падать первая половина, не может падать вторая. Давайте ещё улучшим эту конструкцию.

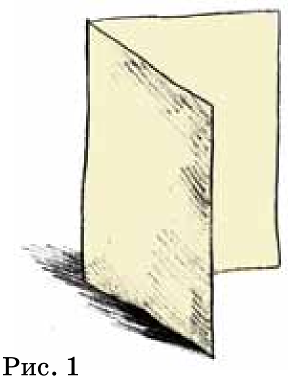


Рис. 1

1. Сверните из бумаги цилиндр, скрепив края листа клеем (рис. 2). Следите за тем, чтобы края цилиндра получились очень ровные, это сильно влияет на прочность. Такой лист уже может выдержать нагрузку в несколько килограммов (рис. 3).

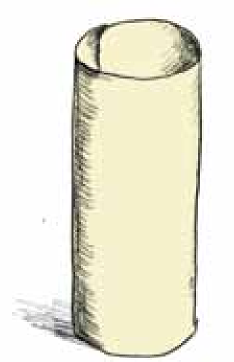


Рис. 2

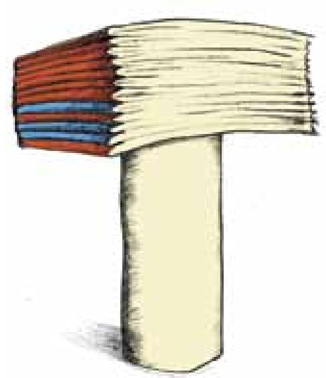


Рис. 3

А теперь усложним себе задачу: сделаем прочный бумажный мост между двумя башнями-цилиндрами. Если просто положить поверх башен лист, он не выдержит и малейшего веса, соскользнув в промежуток между башнями. Чуть прочнее будет лист уголком, если его поставить сразу на обе башни. Но есть куда более крепкий мост.

2. Сделайте ещё пару цилиндров, как в п. 1. Сложите лист бумаги гармошкой (рис. 4). Даже пакет йогурта, поставленный на середину моста, не продавливает бумажный мост!

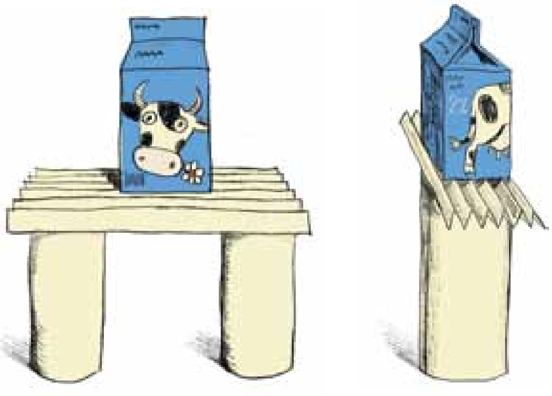


Рис. 4

Такая гармошка иллюстрирует идею рёбер жёсткости. Это специальные складки на ровной поверхности корпуса, делающие его прочнее. Они часто применяются в ситуациях, когда слой материала (например, металла) не должен изгибаться при воздействии на него. Именно поэтому корпуса вагонов (рис.5), грузовиков и контейнеров (рис. 6) делают «сложенными гармошкой», создавая на них рёбра жёсткости.

Рис. 5

Рис. 6

Художник Артём Костюкевич
Фото Дарья Котова

Авторы задач:
Сергей Дворянинов (1–3),
фольклор (4)

Четыре задачи

1. Когда зимой Толя Втулкин едет в автобусе, то он предпочитает держаться за спинку пластмассового кресла, а не за металлические поручни. А летом – наоборот. Почему он так поступает?

2. Когда рано-рано утром я открываю кран с холодной водой, то из него некоторое время течёт тёплая вода. А когда открываю кран с горячей водой, то из него некоторое время течёт прохладная. В чём тут дело и почему так происходит?

3. В прежние времена, когда поезда на железной дороге тянулись паровозами, на крупных станциях и в локомотивных депо устраивали поворотные круги. На этих кругах разворачивали паровозы. Паровоз заезжал с путей передом на рельсовый диаметр AB такого круга, диаметр совершал поворот на 180°, и паровоз возвращался на тот же самый путь. Почему же в наши дни обычно обходятся без поворотных кругов?

4. Поезд едет прямо из Москвы в Петербург. Верно ли, что все его части при этом в любой момент времени приближаются к Петербургу и удаляются от Москвы?

Художник Анастасия Васильева

Простые шахматы

Александр Бердников

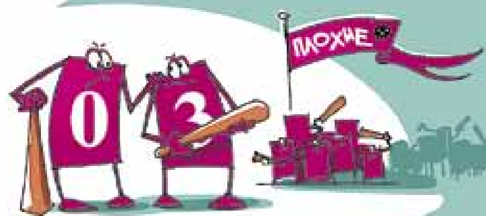
В большинстве видов спорта победитель определяется исходя из его физических возможностей: скорости, силы, выносливости и так далее. В некоторых видах важную роль играют и другие качества, например, артистичность, как в фигурном катании или художественной гимнастике. При этом результат спортсмена зависит уже не только от него самого, но и от судьи. Если время, за которое преодолена дистанция, – это легко и точно замеряемая величина, то артистичность измерить уже гораздо сложнее, особенно если требуется сравнить два хороших, но непохожих выступления. А что бы вы сказали, если бы вам предложили соревноваться с соперником в игре? Да не простой, а в такой, что у вашего противника всегда есть непроигрышные ходы. То есть существует инструкция, описывающая, как не дать вам выиграть. Не очень заманчиво, правда? Однако одна из таких игр уже тысячу лет постоянно собирает огромную аудиторию игроков. По ней проводятся турниры, международные чемпионаты. Это – всем известные шахматы.

Почему же, спросите вы, в эту игру продолжают играть, несмотря на то, что у одного из игроков есть стратегия? Казалось бы, победитель известен заранее. А всё потому, что хотя стратегия и есть, она пока что никому не известна, а будь она известна, весьма вероятно, что удержать её целиком в голове было бы крайне сложно. Так что и по сей день противники в этой игре остаются в примерно равных положениях, так как игроку с выигрышной стратегией не удаётся ею пользоваться – ведь он её не знает.

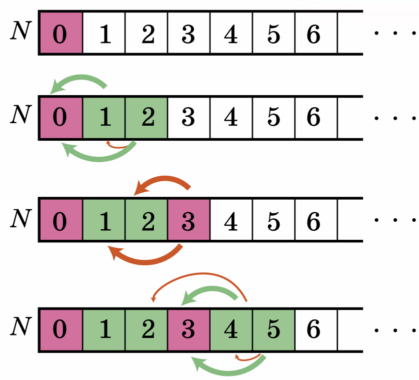
Хорошо, тогда возникает ещё более интригующий вопрос: как же так вышло, что стратегию мы не знаем, но, несмотря на это, уверены, что она есть? Вместо самой стратегии у нас есть метод, как её найти. Стратегия получения стратегии игры в шахматы, так сказать. Причём такой метод есть для любой конечной игры с полной информацией для двух игроков (таковы, например, крестики-нолики на любой конечной доске). Разберём на примере простой игры, что значат эти непонятные слова и как искать стратегию.

Пусть изначально есть натуральное число N, и игроки по очереди вычитают из него или 1, или 2. Проигрывает тот, кто получает на своём ходу отрицательное число. Эта игра конечна: всевозможных партий в ней конечное число и все они заканчиваются за конечное число ходов. То, что эта игра с полной информацией, означает, что игроки перед своим ходом имеют всю информацию о том, в каком состоянии была партия и в какие состояния она перейдёт после каждого из возможных ходов. В частности, нет случайного, не зависящего от игроков процесса, влияющего на исход игры (например, броска игрального кубика или тасования колоды).

Покажем, как в этом случае сработает наш метод (точнее, его упрощённая форма). Про каждое число N в качестве исходного данного нам хочется узнать, выиграет в соответствующей игре первый игрок или второй. Если первый, будем называть N хорошим, если выиграет второй – плохим. Итак, начнём анализировать игру с конца.



Ясно, что число 0 плохое. Теперь главная идея: если первый игрок может своим ходом сделать число плохим, то он выиграет, если нет – проиграет. Действительно, после такого хода игра будто начнётся с начала, только уже с меньшего числа, и игроки поменяются местами: теперь ход другого игрока. Первому игроку для выигрыша необходимо и достаточно «подставить» второго игрока, оставив после себя плохое число. Поэтому число плохое тогда и только тогда, когда из него нельзя попасть в другое плохое число.



Всё, теперь относительно всех чисел очень легко выяснить, плохие они или хорошие. 0 плохое, значит 1 и 2 хорошие, так как из них можно попасть в плохой 0. 3 плохое, так как из него ходы ведут только в хорошие числа 1 и 2. Далее, 4 и 5 опять хорошие: из них есть ходы в плохое 3. Действуя аналогично, можно шаг за шагом выяснить для любого числа, кто выиграет, начав игру с него. К этой задаче теперь несложно даже дать явный ответ (сделайте это самостоятельно). Решающим моментом при наших вычислениях было то, что из очередной позиции X можно попасть только в те, про которые мы уже знаем, кто в них выиграет. А значит, можем вычислить, кто выиграет в позиции X.

Проведём те же рассуждения в общем случае. В частности, этим мы покажем, что даже в такой, казалось бы,

запутанной и непредсказуемой игре, как шахматы, у одного из игроков есть непроигрышная стратегия.

Правда, нужно ещё проверить, что шахматы – это конечная игра с полной информацией. Если с информацией всё очевидно (если закрыть глаза на ограничение партии по времени), то с конечностью всё сложнее. Для конечности в шахматах есть специальное правило, запрещающее повторять любую позицию более двух раз. Всего расстановок фигур на доске не более 13^{64} (на каждое поле можно поставить любую из 12 фигур или ничего), при каждой расстановке ещё нужно выбрать, чей ход ($\times 2$) и кто уже делал рокировку ($\times 4$). Поэтому любая партия не длиннее $2\times(8\times 13^{64})=2N$ ходов и всего партий не больше, чем последовательностей из таких позиций, значит, не более N^{2N}.

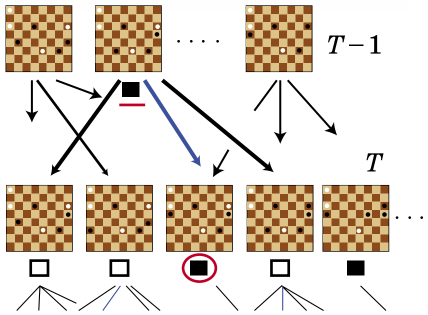


Рис. 1, *а*

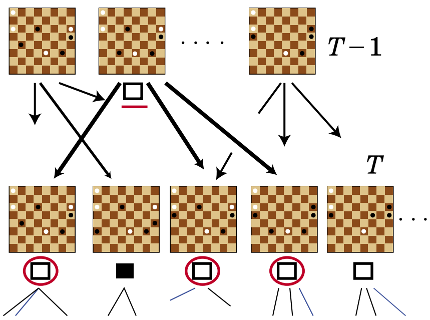


Рис. 1, *б*

Ходят чёрные, номер хода T. Цвет прямоугольника под позицией показывает, для кого она выигрышная. Стрелки – возможные ходы. Синяя стрелка – выигрышный ход. Обведены те прямоугольники, которые нужны для вычисления цвета подчёркнутого прямоугольника.

Давайте разбираться, как же находить стратегию. Под позицией в игре будем понимать не только всю необходимую информацию о её состоянии в данный момент (например, в шахматах – расстановку фигур, чей ход, кто делал рокировку, а кто нет), но и то, сколько ходов уже прошло. Для начала выпишем все возможные позиции «по слоям»: на верхнем нулевом слое будет начальная позиция, на следующем – все возможные после одного хода позиции, и вообще, на n-м слое располагаются позиции, в которые можно попасть за n ходов. Раз игра конечна, то и число наших слоёв конечно. Пусть последний имеет номер L. Посмотрим на позиции с номером L. Поскольку из них ходов нет, то партия окончена, и можно назвать победителя.

Теперь посмотрим на позиции на предыдущем слое $L-1$. Если ходов из такой позиции нет, мы, как и раньше, узнаём победителя. Иначе тот игрок, чей сейчас ход (пусть для определённости чёрные), может пойти в какие-то позиции с номерами L, про которые мы уже всё выяснили. Если среди них есть та, в которой он выиграет, он может туда пойти и выиграть (рис. 1, *а*)*. Если нет, то куда бы он ни пошёл, он проиграет (рис. 1, *б*). Значит, как и раньше, перебрав все позиции, куда можно сходить, мы узнаём победителя и в позиции с номером $L-1$!

Теперь можно проделать то же самое и с предыдущими позициями: просматриваем все возможные ходы, их результаты мы уже обсчитали. Теперь просто записываем победителем того, чей ход, если он записан победителем хотя бы в одной из доступных позиций,

---

* На рисунке изображён переход из произвольного слоя $T-1$ в слой T. В нашем случае $T=L$

а иначе записываем его соперника. Так мы, шаг за шагом, доберёмся до самой первой позиции, когда ещё никто не ходил, и узнаем победителя в ней. Но это и есть победитель всей игры: тот, кто побеждает, если начинать с первого хода с «нетронутой доски»!

При этом в процессе наших вычислений мы рисовали выигрышные ходы ровно в том случае, когда очередь ходить у победителя. Сохранив все эти вычисления, мы получим нарисованную выигрышную стратегию, даже больше. Эта инструкция позволяет выиграть, даже если изначально вы не должны были победить, но противник в процессе игры ошибся, дав вам шанс. Нужно просто после каждого хода находить свою позицию на такой «карте» и ходить согласно нарисованным нами «выигрышным» синим стрелочкам, ведущим в выигрышные для нас позиции. По построению, после любого хода противника мы в таком случае попадём в позицию, из которой опять идёт «выигрышная стрелочка». Если тем временем ещё не выиграем.

На самом деле, в шахматах ещё бывает ничья, что немного усложняет рассуждения. Попробуйте их провести, когда возможна ничья, заодно проверите себя, поняли ли вы суть происходящего. Соответственно, найдём мы такой процедурой не победителя, а игрока, способного гарантировать себе по крайней мере ничью.

После всего этого возникает очередной закономерный вопрос. Если мы построили такую отличную инструкцию, как вычислить стратегию в шахматах, почему её до сих пор не реализовали? На случай слишком объёмных вычислений у нас есть компьютеры. Дело в том, что подобные переборы сложны даже для компьютеров. Наши оценки на число позиций и ходов, сделанные в самом начале, очень грубы – мы считали их с повторениями, насчитали много невозможных позиций и ходов (тоже, кстати, по нескольку раз). Однако и более точные современные оценки неутешительны. Согласно им, для полного анализа игры понадобится около 10^{100} лет работы мощнейшего на сегодняшний день суперкомпьютера. Это не просто много. Если количество атомов во всей Земле умножить само на себя, получится примерно столько же! Поэтому могущество современной вычислительной техники здесь пока что пасует, оставляя нам пространство для импровизаций и наслаждение непредсказуемой игрой.

Художник Леонид Гамарц

Сергей Дворянинов

БУРАТИНО И ЕГО ЧЕРТЁЖНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

Сломалась однажды у Буратино его школьная линейка. Дал ему папа Карло 1 сольдо, и пошёл Буратино новую линейку покупать. Навстречу ему – Лиса Алиса и Кот Базилио.

– Куда это ты, наш юный учёный друг, отправился? – спрашивают так ласково и участливо.

– Да вот новую линейку взамен этой покупать. Тут с её начала почти полтора сантиметра отломились...

– Что же, и денежки у тебя имеются? – поинтересовалась Лиса.

– Да, целый сольдо.

– Знаешь, наш юный любитель геометрии, совсем и не надо тебе новую линейку покупать. Старая ещё послужит, – промурлыкал старый Кот.

– И деньги, главное, при этом у нас останутся.

– Как это?

– Да очень просто. Вот, предположим, есть отрезок AB, который надо измерить. Давай совместим цифру 2 на твоей линейке с точкой A. Так, точке B какое число соответствует? Посмотри, Лисонька, я не разберу...

– 13 тут, уважаемый профессор Базилио.

– Ага, $13-2=11$. Значит, наш отрезок равен 11 см. Вот и всё. Надо вести отсчет не от нуля, как обычно, а от 2-х. И главное – не забывать вычитать 2 при каждом измерении.

– Всё ясно, – воскликнул Буратино. – Старая линейка мне ещё пригодится! Спасибо! – и Буратино уже хотел возвращаться домой.

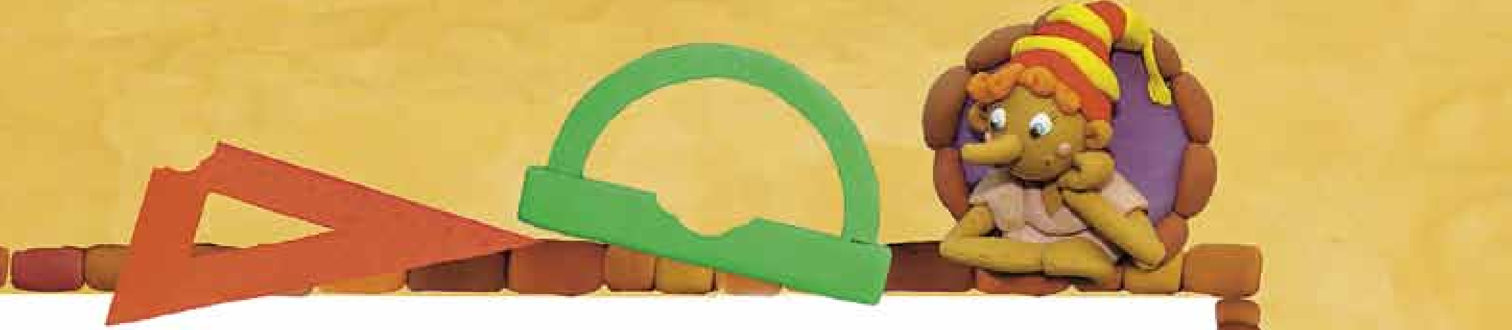
– Постой, постой, а денежки? – ухватила его за рукав Лиса Алиса.

– Так вы говорили, денежки останутся у нас.

– Вот именно у нас, а не у тебя. Наука тоже чего-то стоит. Как раз 1 сольдо, – промурлыкал Кот Базилио, – сейчас рыбки свеженькой морской купим, с йодом, для ума полезную. Да, Лисонька?..

Отдал Буратино свой сольдо старшим товарищам.

Через несколько дней – опять беда. У чертёжного треугольника с прямым углом как раз этот прямой



угол и отломился. Два угла остались, а вместо третьего прямого – рваная такая линия...

Два сольдо дал Папа Карло, и Буратино отправился за новым угольником. И тут как нарочно опять навстречу Лиса с Котом.

И снова говорят-убеждают: можно и таким ущербным треугольником перпендикуляры к прямой восстанавливать. Стало Буратино любопытно: как это можно сделать? В самом деле, интересно.

Тут снова Кот Базилио профессорским тоном начал поучать:

– Сумма углов треугольника – 180 градусов. 90 градусов мы потеряли. Значит, сумма двух оставшихся равна 90 градусам. И если нам требуется в точке на прямой восставить перпендикуляр, то мы с помощью нашего треугольника сначала один острый угол построим с вершиной в точке A, а потом второй к нему добавим. В сумме получится прямой. Немножко длинно получается, но абсолютно точно – прямой угол.

– Да, абсолютно точно, и стоит этот метод, – Лиса Алиса взглянула на монеты в руках у Буратино, – точно 2 сольдо.

В сказке всё бывает обычно три раза. Так и у Буратино сломался третий чертёжный инструмент – транспортир. Тот, который служит для измерения углов. А отломился центральный кусочек транспортира, – вместе с той точкой, которую совмещают обычно с вершиной измеряемого угла. Тут уже Папа Карло дал сыночку своему три сольдо на покупку нового.

И крепко задумался тогда Буратино. Ведь опять наверняка Лиса с Котом ему на пути встретятся. Снова скажут, как можно углы измерять таким дефектным транспортиром. Любопытно знать, как это можно делать. Пожалуй, и 3 сольдо за это можно отдать. А с другой стороны обидно: сколько же можно за учение платить? Ведь и своя голова на плечах есть...

В общем, задумался Буратино над этой задачей, и... РЕШИЛ!!! Догадайтесь и вы, наши читатели!

РАЗОБЛАЧЕНИЕ НЕОБЫЧНОГО МОЛОТКА

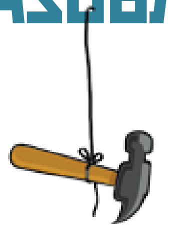


Фото 1

Мы надеемся, что наши читатели сумели подвесить молоток так, как показано на фото 1, и убедились, что подвоха нет. А почему же конструкция остаётся в равновесии?

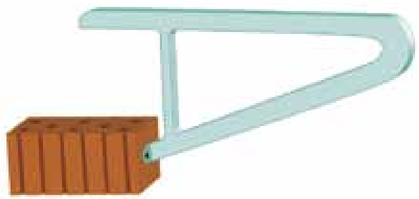


Рис. 1

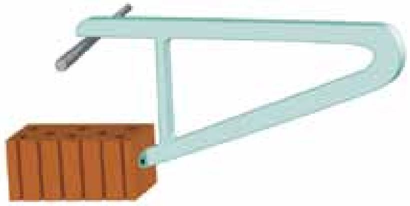


Рис. 2

Рассмотрим такую модель: к тяжёлому предмету (например, кирпичу) приделана очень лёгкая и прочная скоба необычной формы (как на рисунке 1). Подвесим это тело за палку, как на рис. 2. Будет ли оно в равновесии?

Будет! Действительно, когда мы отпустим конструкцию, она будет находиться под действием только силы тяжести, действующей практически лишь на тяжёлый кирпич (сила тяжести, приложенная к лёгкой скобе, незначительна). Значит, кирпич может двигаться только вниз.

С другой стороны, кирпич может только вращаться вокруг палки. Отрезок, проведённый из точки опоры к центру кирпича, практически вертикален; следовательно, кирпич находится в самом нижнем положении из возможных, а потому останется неподвижным. Значит, и вся конструкция будет неподвижна.

Заменим палку краем стола (рис. 3). То, что получилось, очень похоже на «невероятный» молоток. Ведь привязанный к линейке молоток, упираясь в неё своей ручкой, образует похожий «крюк» с грузом (металлической частью). Этот крюк опирается на край стола, а основная масса сконцентрирована под точкой опоры. Поэтому конструкция с молотком и не падает.

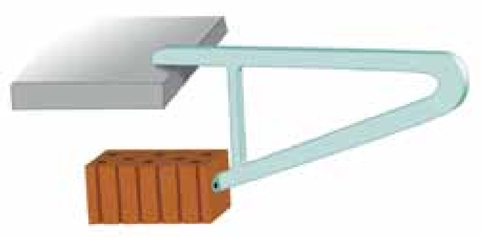


Рис. 3

Здесь дело в том, что наша конструкция – жёсткая (если скоба достаточно прочная и мы её хорошо приделали). Как говорят физики – она представляет собой единое твёрдое тело, только довольно сложной формы. И это тело подвешено за точку, находящуюся ровно над его центром тяжести, как если бы мы просто подвесили кирпич к краю стола на верёвочке.

Некоторые гимнастические упражнения, кстати, наглядно демонстрируют схожий эффект. На фото 2 атлет выполняет упражнение на кольцах и находится в равновесии. При этом он опирается на каждое из колец с помощью такого же «загнутого крюка», образованного рукой и телом гимнаста.

В заключение приведём ещё одну «невозможную» фотографию (фото 3). Попробуйте сами изготовить эту конструкцию и убедиться, что она совершенно реальна. А почему – станет понятно, если вы сообразите – где находится общий центр тяжести двух вилок?

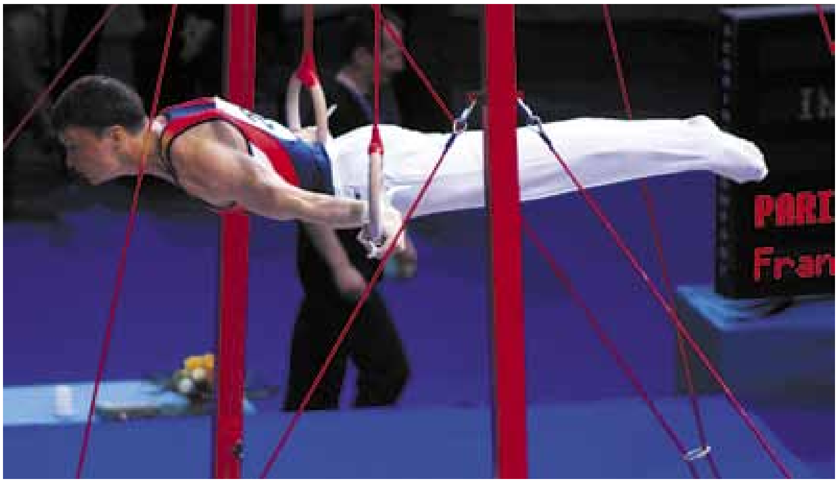


Фото 2

Фото 3

Фото 1, 3: Дарья Котова

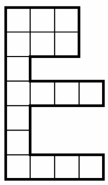
Порою условия математических задач скучноваты. «Двое путников одновременно вышли из пункта *А* по направлению к пункту *В*.» Где же тут романтика?

А на математическом конкурсе «Весенний Олимп» для 1 – 7 классов, прошедшем в апреле 2012 года в Москве, пираты, клады и путешествия удивительным образом связаны с хитрыми головоломками! Мы предлагаем подборку из нескольких задач.

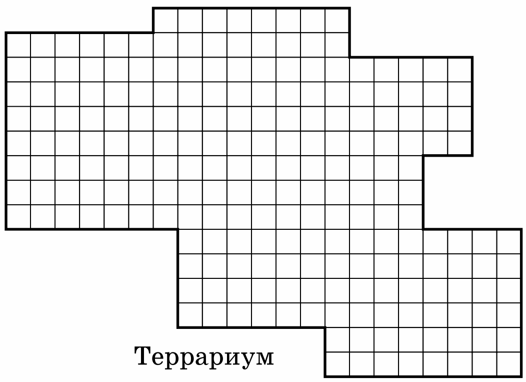
В этом году конкурс «Весенний Олимп» для 1 – 4 классов пройдёт 21 апреля, а для 5 – 7 классов – 20 апреля. Для участия в конкурсе *нужно зарегистрироваться*; регистрация открывается 25 марта. Подробности о конкурсе и регистрации можно будет узнать на сайте **http://matznanie.ru**

4 КЛАСС

1. Старый пират Джек поймал несколько странных животных и назвал их *кребуретками*.



Кребуретка



Террариум

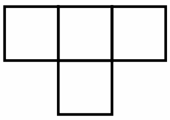
Размести в террариуме как можно больше кребуреток.

2. Капитан Одноногий Джек купил несколько бочек рома. По дороге на корабль половину бочек он подарил старым друзьям. Половину оставшихся бочек Джек утопил, пока пытался забраться на свою шхуну. На корабле команда Джека выпросила половину оставшихся бочек. Вечером старые друзья вернули

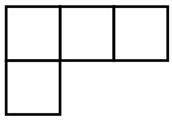
В 2012 году конкурс проводили Московский городской дворец детского и юношеского творчества, ГОУ ЦО №936 при поддержке фирмы PEZ, компании Intersystems, компании Яндекс.

Джеку столько же рома, сколько он у них взял. Джек сидит перед пятью бочками и думает: сколько же он купил рома? Помогите Джеку!*

3. Из клада, найденного на острове, капитан Флинт дал юным пиратам Биллу и Сэму по 4 золотые пластины, но сказал, что они смогут забрать это золото себе насовсем, только если фигуры, которые каждый сложит из всех своих пластин, окажутся одинаковыми (одинаковые фигуры – равные по форме и размерам). Помоги юным пиратам сложить одинаковые фигуры (пластины можно поворачивать и переворачивать).



Пластина Билла

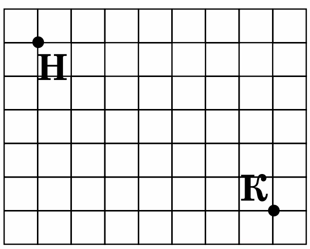


Пластина Сэма

4. Боб, Джек, Роб, Ян, Марк, Аврелий собираются отправиться в таверну. Но Боб отказывается идти вместе с Марком, Джек вместе с Аврелием или Яном. Джек никуда не пойдёт без Роба, Роб никуда не пойдёт без Яна, Ян никуда не пойдёт без Марка. Какое наибольшее количество людей может отправиться в таверну?

5. Билл сложил квадратный платок пополам так, что получился прямоугольник. Его он разрезал по диагонали. На какие фигуры распался платок?

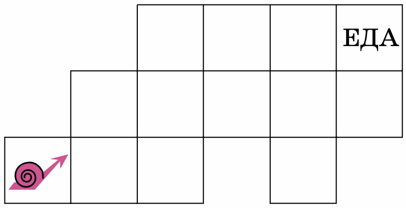
6. Путешественник Магеллан ходит по сетчатому острову, записывая, сколько шагов он сделал. После каждого хода он поворачивал, при этом никакую точку не проходил дважды. От точки Н он дошёл до точки К. Вот список его ходов: 3, 3, 2, 2, 1, 3, 5, 1, 1, 2, 7. Восстанови его маршрут.



* На олимпиаде участникам была предложена несколько иная задача.

6 КЛАСС

1. Старый пират Джек скрестил улитку с компасом, получив странное существо – *улимпаса*. Домик улимпаса разделён на несколько комнат, при этом улимпас может переползать только в комнату, находящуюся справа (на восток) или сверху (на север) от текущей. Сколькими способами улимпас может добраться до корма? (Разные способы – разные последовательности посещённых улимпасом комнат.)



2. Пираты собирались в плавание. Им нужно было закупить ром, мясо и порох. Капитан Джек велел повару Бобу купить хотя бы 2 бочки пороха и хотя бы 2 бочки рома. Рассказывая капитану о покупке, Боб похвастался: «Представляешь, я настолько удачно купил провиант, что количество бочек пороха и мяса вместе оказалось простым числом. Общее количество бочек пороха и рома тоже простое. И даже бочек рома и мяса в сумме — простое число!» Повар не успел договорить, потому что капитан Джек взмахнул саблей и отрубил Бобу все пуговицы на рубашке. Как он догадался, что повар Боб неправильно выполнил его распоряжения?

3. Пираты отправились в плавание. Через некоторое время весь провиант закончился, а ни одного корабля они так и не встретили. Тогда в отчаянии капитан обратился к своим попугаям за помощью.

– Надо плыть на север, – сказал первый попугай.

– Если мы поплывём на восток, то погибнем, – сказал второй попугай.

– Они оба врут, – сказал третий попугай.

– Все трое врут, – сказал четвёртый попугай.

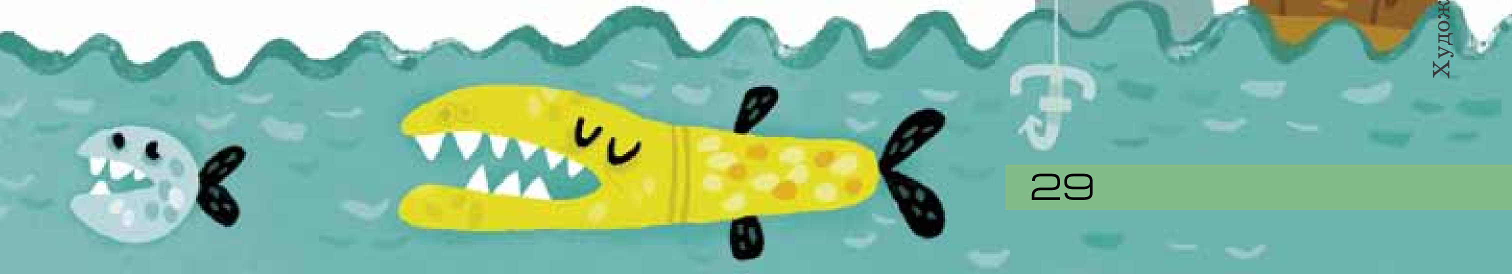
– Ты врёшь, – сказал первый попугай четвёртому.

Капитан знает, что каждый из его попугаев либо всегда говорит правду, либо всегда врёт. Куда надо плыть?

4. Пираты вдвоём взяли на абордаж корабль с золотом. Драться друг с другом у них не осталось сил, поэтому они разыграли добычу в карты. Они взяли две одинаковые колоды карт, тщательно перемешали, всю большую колоду поделили между собой как попало. Далее каждый из них ищет среди своих карт пары одинаковых (по масти и достоинству), одну карту из каждой пары отдаёт сопернику, другую скармливает своему попугаю. Тот, у кого после этого останется меньше карт, отдаёт свою долю победителю. Верно ли, что в такой игре игрок, взявший изначально карт меньше, чем соперник, всегда побеждает?

5. После успешного абордажа пираты стали делить золото. К сожалению, справедливого дележа не получилось, и обиженные пираты высадили капитана на необитаемый остров. Чтобы выжить, капитану пришлось заняться скотоводством. Чтобы разводить гусей, нужен забор, огораживающий площадь не менее 25 м^2. Для разведения свиней требуется хотя бы 35 м^2. Для разведения коров – хотя бы 40 м^2. У капитана есть доски с гвоздями, из которых можно сделать забор длиной не более 56 м. Сможет ли он разводить все 3 вида животных? (Разных животных нельзя держать на одной территории.)

Художник Анастасия Мошина

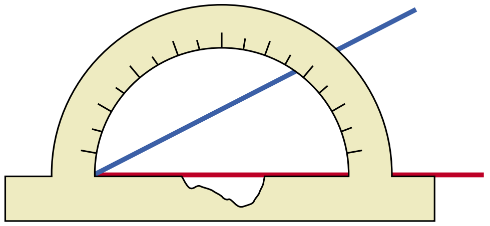


ДЯДИН ПОДАРОК («Квантик» №1)

Так как на такой случай Том распоряжений не давал, придётся как-то выкручиваться. Можно его пожелание переформулировать так: сын должен получить вдвое больше, чем мать; мать должна получить вдвое больше, чем дочь. Теперь можно выполнить дядину просьбу, разделив деньги между сыном, матерью и дочерью в отношении 4:2:1, то есть дать им 120, 60 и 30 монет соответственно.

БУРАТИНО И ЕГО ЧЕРТЁЖНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

При обычном использовании транспортира измеряемый угол оказывается центральным углом. Он измеряется соответствующей дугой окружности. У сломанного транспортира центр окружности неизвестен, поэтому традиционное измерение угла невозможно. Однако, расположив транспортир так, как показано на рисунке, мы получим, что измеряемый угол является вписанным в окружность (его вершина лежит на окружности). Такой угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Так можно измерять углы от 0 до 90 градусов. Чтобы измерить тупой угол, измеряем смежный с ним острый угол.



МУДРЕЦЫ И КОПОТЬ

Если бы испачкались трое мудрецов, то они бы всё равно пошли мыться, но только если они мыслят «с одинаковой скоростью». Рассуждения у каждого были такими:

«Вот я вижу двух испачканных мудрецов. Если бы я был чист, то было бы двое грязных мудрецов. Тогда (как мы уже выяснили) мудрецы через некоторое время соображают, что они грязны и идут мыться. Но время идёт, а они всё в задумчивости. Значит, я тоже грязен, пойдука помоюсь». Заметьте, что если бы два из трёх грязных мудрецов рассудили бы так быстрее третьего и пошли умываться, третий подумал бы, что это и были двое грязнуль и остался бы в заблуждении, что он чист.

Немного обобщив эти рассуждения, можно доказать удивительный факт: сколько бы ни было грязных и чистых мудрецов (хоть по 100), через некоторое время все грязнули пойдут мыться, а чистые останутся. Но чтобы этот трюк сработал в жизни, нужна неправдоподобная синхронность мышления мудрецов.

ЧЕТЫРЕ ЗАДАЧИ

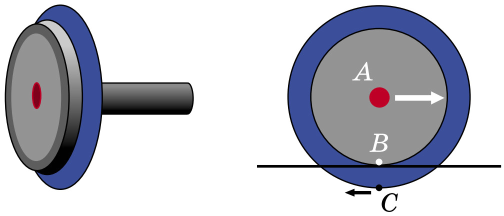
1. Теплопроводность металла лучше (выше), чем у пластмассы. Зимой металлические поручни быстро отводят тепло от рук, руки мерзнут. А летом наоборот: желательно как-то охладиться.

2. Ночью расход воды сокращается или даже вообще прекращается. Вода в трубах застаивается. В итоге температура воды в трубах приближается к комнатной. Поэтому вначале из обоих кранов – горячего и холодного – течёт вода с примерно одинаковой температурой.

3. У современных локомотивов – электровозов и тепловозов – две кабины, машинист может управлять локомотивом из любой кабины. Нет необходимости разворачивать локомотив. По схожему принципу работают поезда метро и электрички.

В некоторых депо поворотный круг до сих пор функционирует: от него лучами расходятся много путей, и он используется в качестве компактной развилки (например, для распределения локомотивов по боксам депо).

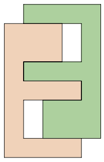
4. Неверно. На колёсах всех вагонов есть кольцевые выпуклости с внутренней стороны (отмечены синим на рисунке). Они не позволяют сойти поезду с рельсов даже на крутых поворотах. Они больше самого колеса, поэтому самая нижняя их часть, расположенная ниже поверхности рельса, движется в обратную сторону. Действительно, центр колеса A, нижняя точка колеса B и точка C на выпуклости всегда лежат на одной прямой. Точка A едет вперёд, B почти неподвижна, значит, C едет назад.



ВЕСЕННИЙ ОЛИМП

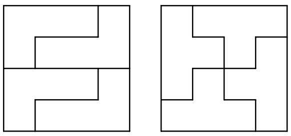
4 класс

1. Нам удалось разместить в террариуме 9 кребуреток. Мы воспользовались тем, что кребуретки удачно «вставляются» друг в друга (смотри рисунок):



2. Ответ: 8 бочек.

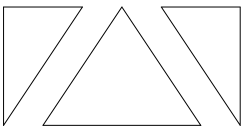
3. Ответ: смотри рисунок.



4. Ответ: 4.

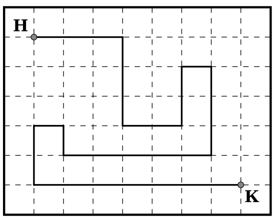
Указание: Из каждой из пар Боб-Марк и Джек-Ян может пойти не более одного человека, значит, как минимум двое не могут пойти. Осталось подобрать пример на 4 человек.

5. Ответ: смотри рисунок.



6. Ответ: смотри рисунок.

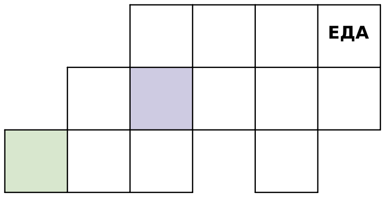
Указание: восстановите последние 2 хода Магеллана, потом первые 2. После этого путь восстанавливается однозначно.



6 класс

1. Ответ: 8.

Указание: от стартовой зелёной клетки до синей клетки можно добраться 2 способами, от синей до еды – 4 способами. Значит, всего есть $2 \times 4 = 8$ способов.



2. *Указание:* простые числа, большие 2, нечётны. Значит, как минимум два количества бочек чётны.

3. Ответ: на север.

Указание: предположим, первый попугай врёт. Тогда четвёртый попугай сказал правду, что первые трое попугаев врут. Тогда из слов третьего попугая следует, что первые два попугая правдивы, то есть и первый попугай не врёт. Противоречие.

4. Ответ: нет, неверно.

Указание: рассмотрите ситуацию, когда у одного из игроков 3 карты попарно различных мастей и достоинств и нет червей, а у другого 5, притом четыре из них попарно различных мастей и достоинств, и есть 2 червонные карты.

5. Ответ: сможет (смотри рисунок).

Указание: площадь круга 100 квадратных метров. Несложным подсчётом можно убедиться, что на указанные перегородки уйдёт менее 53 метров забора.

НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 15 марта по электронной почте **kvantik@mccme.ru** или обычной почтой по адресу:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11,
журнал «Квантик».

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный адрес.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Итоги будут подведены в конце года. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик», научно-популярные книги, диски с увлекательными математическими мультфильмами.

Желаем успеха!

II ТУР

1. К каждой грани кубика приклеили по такому же кубику. К каждой грани поверхности получившейся фигуры приклеили ещё раз по такому же кубику (при этом некоторые кубики закрыли две грани).

а) Сколько граней у полученного тела?

б) Из скольких кубиков состоит это тело?

2. Квантик ввёл для себя режим: теперь только по средам, субботам и нечётным числам он читает Пушкина. Какое наибольшее количество дней подряд он может наслаждаться творениями великого поэта?

НАШ КОНКУРС

ОЛИМПИАДЫ

Авторы задач:
Л. Штейнгарц (4),
С. Дворянинов (5)

3. Есть 101 монета. 100 из них одинаковые настоящие, а одна фальшивая, отличающаяся от настоящих по весу. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь узнать, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая? (Находить фальшивую монету не требуется.)

4. В слове **КВАНТИК** каждую букву заменили некоторой цифрой. Причём одинаковые буквы то есть (две буквы К) были заменены одинаковыми цифрами, а разные – разными. При этом оказалось, что выполняется следующее равенство:

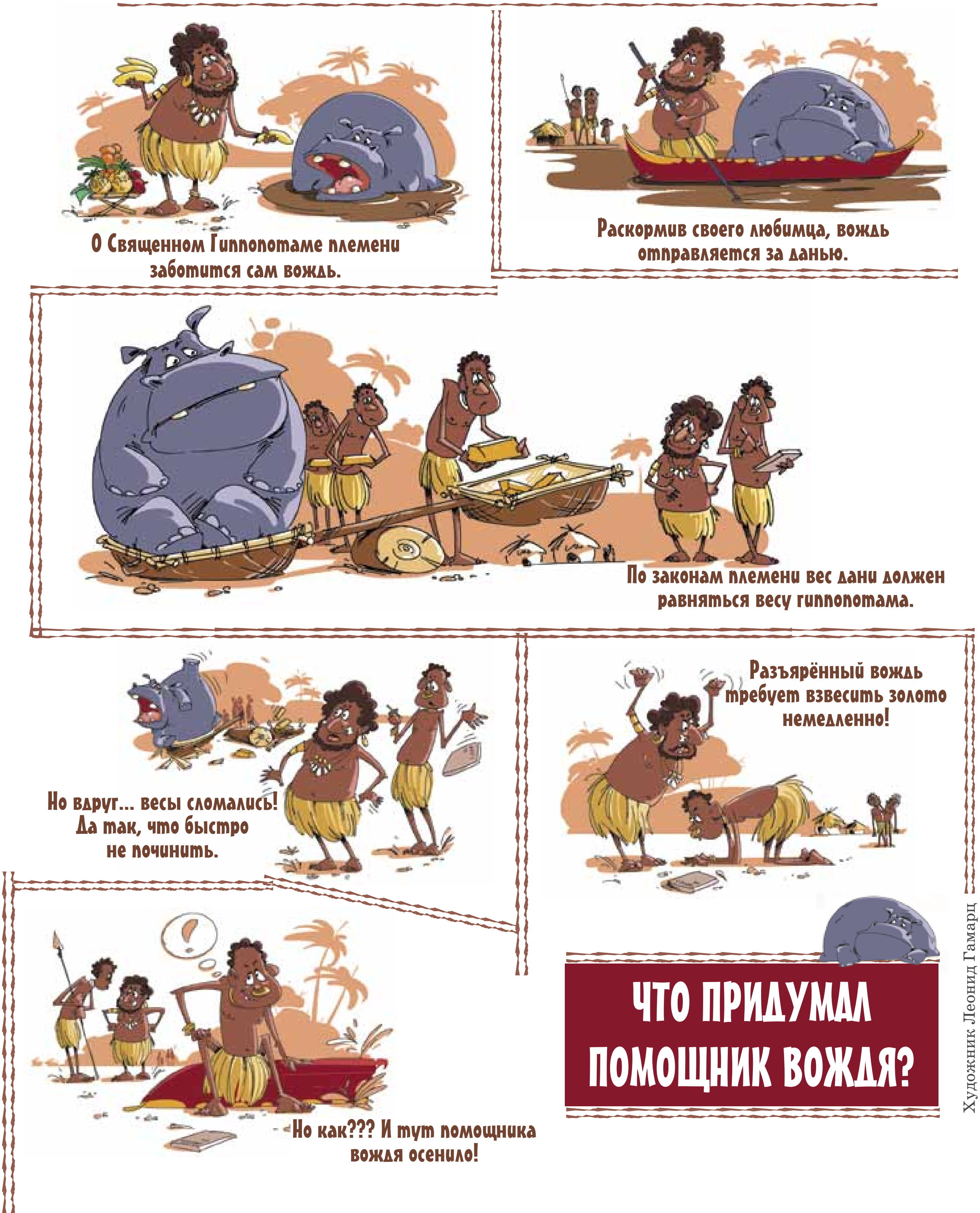
КВАНТ : ИК = 2013

Найдите, при каких значениях букв это возможно.

5. В прежние времена, когда шариковых ручек еще не было, ученики приносили в класс и ставили на парты чернильницы-непроливайки. Это такие сосуды, в которые легко окунуть перо, но при этом чернила из них не выливались, как их ни крути и ни опрокидывай. А как они были устроены? Придумайте и нарисуйте схему таких непроливаек.

Художник Дарья Котова

КАК ВЗВЕСИТЬ ГИППОПОТАМА



Художник Леонид Гамарц